دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۹۱. تابع f از IR به IR در تساوی $f(x)f(y)=f(x-y)$ به ازای هر x و y صدق می‌کند. $f(۲۰۱۷)$ را به دست آورید.

۲۹۲. پانزده رقم ۱ در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیم با نوشتن چند علامت «+» بین آن‌ها، حاصل جمعی بسازیم که مضرب ۳۰ باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (برای مثال $S=۱۱۱+۱+۱۱+۱۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱۱$ یکی از پاسخ‌هاست.)

۲۹۳. فرض کنید A، B، C، D، E و F، شش نقطه روی یک دایره باشند (با همین ترتیب). همچنین فرض کنید، X نقطهٔ تقاطع AD و BE، Y نقطهٔ تقاطع AD و CF، و Z نقطهٔ تقاطع CF و BE باشند. اگر X روی پاره‌خط BZ و AY و Y روی پاره‌خط CZ باشند و داشته باشیم: $AX=۳$، $BX=۲$، $CY=۴$، $DY=۱۰$، $EZ=۱۶$ و $FZ=۱۲$، مطلوب است محیط مثلث XYZ.

۲۹۴. تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۶x+۱۰y+۱۵z=۳۰۰۰$ را به دست آورید.

۲۹۵. ABCD یک چهارضلعی محدب است و داریم $AC=۷$ و $BD=۱۷$. فرض کنید M، N، P و Q نقاط میانی AB، BC، CD و DA باشند. حاصل $MN^۲+PQ^۲$ را بیابید.

۲۹۶. زوج (A و B) از زیرمجموعه‌های $X=\{۱, ۲, ..., ۱۳۹۶\}$ را ویژه می‌نامیم، هرگاه نه A زیرمجموعهٔ B باشد و نه B زیرمجموعهٔ A. تعداد زوج‌های ویژه را به دست آورید.

۲۹۷. روی تختهٔ سیاه عددهای ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده‌اند. در هر دقیقه، دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و دو عدد $\frac{a+b}{۲}$ و $۲(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})^{-۱}$ را به جای آن‌ها می‌نویسیم. بعد از چند مرحله به وضعیتی رسیده‌ایم که همهٔ عددها به جز یک عدد، برابر ۱ هستند. آن عدد چیست؟

۲۹۸. چند تابع از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ..., n\}$ به مجموعهٔ

$\{۱, ۲, ..., m\}$ می‌توان نوشت، به طوری که برای هر $۱\le k\le n$، $f(k)\ge k-۲$؟

۲۹۹. لاستیک‌های عقب اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های جلو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

۳۰۰. اگر برای هر $n\in N$، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^n+x^{n-1}+...+x=n+۲$ را a_n بنامیم، ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگراست و حد آن را به دست آورید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۶۱. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را بیابید، به‌طوری‌که:

$$x+\sqrt[۳]{x}=۲y,\ y+\sqrt[۳]{y}=۲z,\ z+\sqrt[۳]{z}=۲x$$

تابع $f(t)=\frac{t+\sqrt[۳]{t}}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع روی IR صعودی است. (چرا؟) اگر $\{x, y, z\}$ یک جواب دستگاه باشد، آن‌گاه: $f(x)=y$، $f(y)=z$ و $f(z)=x$. ادعا می‌کنیم: $f(x)=x$. در غیر این صورت، اگر: $f(x)<x$، آن‌گاه: $f(f(x))<f(x)<x$ و در نتیجه: $f(f(f(x)))<f(f(x)<f(x)<x$. از طرف دیگر: $f(f(f(x)))=x$. پس $x<x$ که تناقض است. در نتیجه: $f(x)=x$ و یا $x=\sqrt[۳]{x}$. پس: $x=۰$ یا $x=۱$ و یا $x=-۱$.

بنابراین دستگاه معادلات فوق سه دسته جواب دارد: (۱-، ۱-، ۱-) و (۱، ۱، ۱) و (۰، ۰، ۰).

۲۶۲. چند زوج از اعداد طبیعی می‌توان یافت، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

با فرض $۱۳۹۵=a+b$ و $ab=۱۳۹۵k$، داریم: $a^۲-۱۳۹۵a+۱۳۹۵k=۰$ که در آن k عددی طبیعی است. با تشکیل Δ داریم: $\Delta=۱۳۹۵(۱۳۹۵-۴k)$ که باید مربع کامل باشد. با تجزیهٔ ۱۳۹۵ به عامل‌های اول، یعنی $۵\times۹\times۳۱$، نتیجه می‌شود که باید $۱۳۹۵-۴k$ نیز بر این اعداد بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست. در نتیجه چنین زوجی وجود ندارد.

۲۶۳. 2n نقطه در صفحه مفروض هستند. ثابت کنید می‌توان با n پاره‌خط دوبه‌دو نامتقاطع، این نقاط را به‌هم وصل کرد، به‌طوری‌که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد.

در میان تمام «n پاره‌خط‌های ممکن» که تعدادشان متناهی است، آن حالتی را در نظر بگیرید که مجموع طول n پاره‌خط، کمترین مقدار ممکن باشد. ثابت می‌کنیم در این حالت هیچ دو پاره‌خطی از این n پاره‌خط، متقاطع نیستند (برهان خلف). فرض کنید دو پاره‌خط AB و CD از این n پاره‌خط متقاطع باشند. با تعویض این دو پاره‌خط با دو پاره‌خط AC و BD به n پاره‌خط جدید می‌رسیم که مجموع طول آن‌ها کمتر است و این تناقض است. پس هیچ دو پاره‌خطی از n پاره‌خط اولیه متقاطع نیستند.

۲۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ E روی AB و نقطهٔ F روی AC مفروض‌اند؛ به‌طوری‌که EF و AB موازی‌اند. اگر O مرکز ثقل مثلث AEF و M نقطهٔ میانی EC باشد، مطلوب است اندازهٔ زاویه OBM.

فرض کنید T تقاطع EF و BM باشد. چون دو مثلث MET و MCB همنهشتند، در نتیجه BCTE یک متوازی‌الاضلاع و مثلث CTF متساوی‌الاضلاع است. همچنین، چون دو مثلث OEB و OFT همنهشتند، داریم: OB=OT و $\widehat{FOT}=\widehat{EOB}$. بنابراین مثلث BOT یک مثلث متساوی‌الساقین است و: $\widehat{BOT}=\widehat{EOF}=۱۲۰^\circ$.

OM میانهٔ مثلث BOT است و در نتیجه نیم‌ساز است. پس: $\widehat{BOM}=۶۰^\circ$ و بنابراین: $\widehat{OBM}=۳۰^\circ$.

۲۶۵. همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به‌صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

اگر $P=x^۳-y^۳$ اول باشد، آن‌گاه $P=(x-y)(x^۲+xy+y^۲)$. در نتیجه $x-y=۱$. پس x و y دو عدد متوالی هستند. با فرض $P<۱۰۰$ و با آزمودن مقادیر به عددهای ۷، ۱۹، ۳۷ و ۶۱ می‌رسیم که شرایط فوق را دارند.

۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر است با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

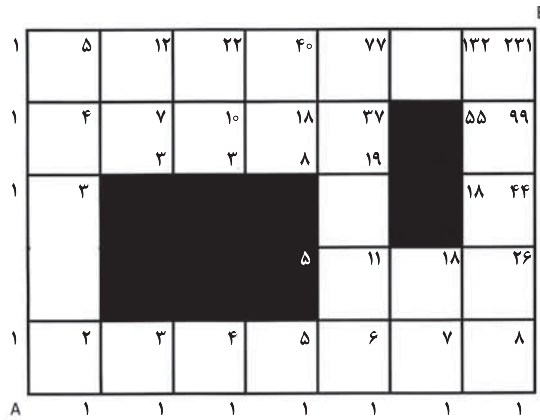
اگر d بزرگ‌ترین عامل مشترک ۲۰ عدد باشد، آن‌گاه با تقسیم عددها بر d به ۲۰ عدد می‌رسیم که مجموعشان حداقل ۲۰ است. پس: $\frac{۴۶۲}{d}\ge ۲۰$ و یا $d\le ۲۳$. از طرف دیگر، d باید ۴۶۲ را بشمارد. با توجه به تجزیهٔ $۴۶۲=۲\times۳\times۷\times۱۱$، بیشترین مقدار d، ۲۱ است.

۲۶۷. مقدار a را بیابید، به‌طوری‌که معادلهٔ زیر دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

$$|x|+|x-۱|+...+|x-۱۳۹۶|=a$$

اگر x یک ریشهٔ معادله باشد، $۱۳۹۶-x$ هم ریشهٔ دیگر معادله است. پس باید داشته باشیم: $x=۱۳۹۶-x$ و یا $x=۶۸۳$. با جای‌گذاری این مقدار به پاسخ $a=۶۸۳\times۶۸۴$ می‌رسیم.

۲۶۸. در شکل یک چند مسیر از A به B وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.

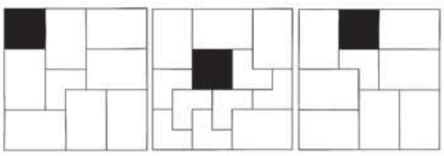


شکل ۱.

در شکل تعداد مسیرها از نقطهٔ A تا هر نقطه مشخص شده است. برای این کار کافی است به‌صورت بازگشتی تعداد مسیرها تا هر نقطه را از مجموع تعداد مسیرها تا دو نقطه پایینی و سمت چپی به دست آوریم. پس پاسخ برابر است با: ۲۳۱.

۲۶۹. از یک جدول مربعی به ضلع n=۶k+۱ یک خانه ۱×۱ را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل فرش کرد.

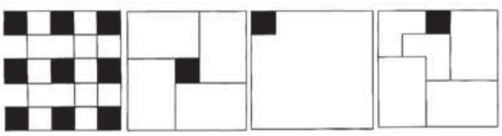
حکم را به روش استقرا ثابت می‌کنیم. برای k=۱ حکم برقرار است. برای k=۱، با توجه به تقارن، سه حالت وجود دارد که در شکل ۲ آمده است. در این سه حالت، صفحهٔ ۷×۷ با یک مربع ۲×۲ که شامل خانهٔ حذف شده است و مستطیل‌های ۲×۳ و تعدادی موزاییک پر شده است و فرش کردن صفحه امکان‌پذیر است. حال فرض کنید حکم برای n=۶k+۱ برقرار باشد. مربعی به ضلع n=۶k+۷ در نظر بگیرید. می‌توان مربعی به ضلع n=۶k+۱ چنان از یکی از چهار گوشه جدا کرد که شامل خانهٔ حذف شده باشد. طبق فرض این قسمت قابل فرش کردن است. باقی‌ماندهٔ خانه‌ها دو مستطیل (۶k+۷)×۶ و (۶k+۱)×۶ هستند که به راحتی با مستطیل‌های ۲×۳ فرش می‌شوند و هر مستطیل ۲×۳ نیز با دو موزاییک فرش می‌شود.



شکل ۲.

۲۷۰. از یک جدول ۵×۵، کدام خانهٔ ۱×۱ را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیهٔ خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل فرش کنیم؟

چون از ۸ موزاییک استفاده می‌شود، بنابراین یکی از ۹ خانهٔ رنگ شده پوشیده نمی‌شود. شکل ۳ نشان می‌دهد که کدام خانه‌ها ممکن است خانه‌های حذف شده باشند.



شکل ۳.